Differenzierbarkeit

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS

Eine Funktion $f(x)$ ist differenzierbar an der Stelle x_0, falls der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert. Dieser Grenzwert wird als **Differentialquotient** bezeichnet.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Der Differentialquotient ist dann die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Anschaulich bedeutet das, dass du an der Stelle x_0 eine eindeutige Tangente an die Funktion anlegen kannst. Die Funktion muss also stetig sein und darf keinen „Knick“ haben.

Funktion auf Differenzierbarkeit überprüfen

Um eine Funktion auf Differenzierbarkeit zu prüfen, betrachte den links– und den rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten. Stimmen die Grenzwerte überein ist die Funktion differenzierbar an der Stelle x_0.

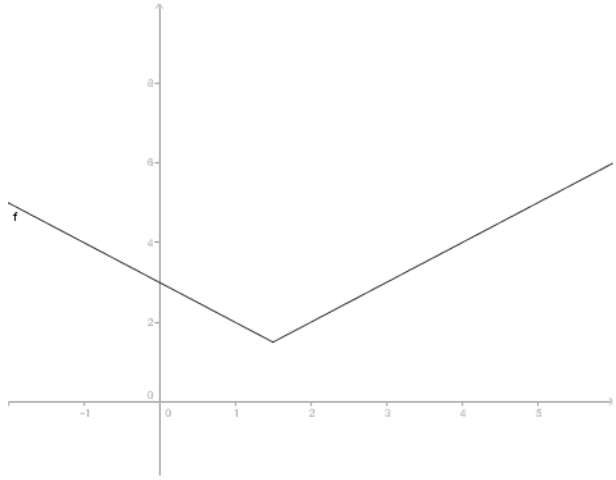
$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Falls du die Ableitung der Funktion kennst, kannst du auch folgende Gleichheit überprüfen:

$$\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=\lim_{x\to x_0^-}f'(x)$$

Beispiel 1

Überprüfe ob die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist: $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x\leq 1,5\\ x, & x>1,5\end{cases}$



1. Schritt: Ableitung bilden

Du kannst die Funktion stückweise ableiten:

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & x\leq 1,5\\ 1, & x>1,5\end{cases}$$

2. Schritt: Werte der Ableitungsfunktion überprüfen

Die Funktion $-x+3$, sowie die Funktion x sind differenzierbar. Somit musst du nur die Stelle $x_0=1,5$ auf Differenzierbarkeit prüfen.

$$\lim_{x\to 1,5^+}f'(x)=1$$

$$\lim_{x \to 1,5^-} f'(x) = -1$$

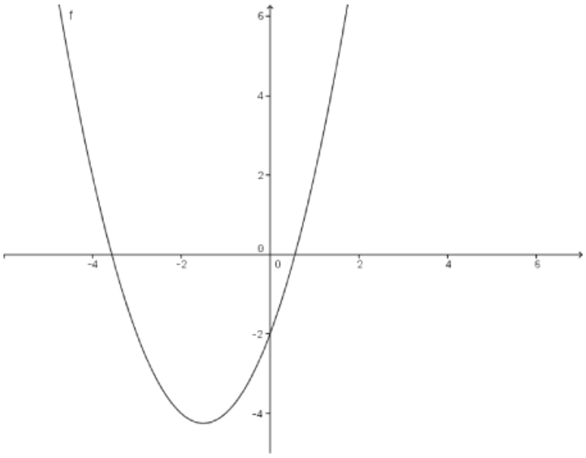
$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 1,5$ nicht differenzierbar.

Beispiel 2

Überprüfe, mithilfe der h –Methode, ob die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist.

$f(x) = x^2 + 3x - 2$



$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 3(x+h) - 2 - (x^2 + 3x - 2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - 2 - x^2 - 3x + 2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 3h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 2x + h + 3 \\
&= 2x + 3 \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

Der Differentialquotient existiert, somit ist die Funktion f differenzierbar für $x \in \mathbb{R}$.